EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS PH-M

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Préambule

Le problème propose l'étude, dans trois cadres distincts, des propriétés des polynômes P_n de Gégenbauer.

Ces polynômes sont d'abord définis, c'est l'objet de la première partie, dans le cadre d'une analyse de Fourier. Ils apparaissent ensuite par leur fonction génératrice dans la deuxième partie, comme coefficients des termes d'une série entière.

Enfin, la troisième partie, qui les fait intervenir dans le cadre de la recherche des vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint, fournit quelques applications, conséquences de l'orthogonalité.

PREMIERE PARTIE

Le nombre réel λ étant donné, vérifiant $0 < |\lambda| < 1$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(\theta) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2}$$

1- Propriétés de f

a) Montrer que f est paire et périodique. Préciser sa période.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2- Représentation graphique de f

Représenter, dans un système d'axes orthonormés, la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$, le nombre λ étant choisi égal à 0,75.

3- Coefficients de Fourier de f

Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont notés a_n et b_n pour $n > 0$ et $\frac{a_0}{2}$ est le premier coefficient.

a) Indiquer la valeur de b_n et écrire les coefficients a_n à l'aide d'intégrales portant sur le segment $[0, \pi]$.

b) Calculer a_1 en fonction de a_0 et de λ.

c) Après avoir linéarisé, pour $n \geq 1$, l'expression $(1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2) \cos n\theta$, montrer qu'il existe entre trois termes a_n d'indices consécutifs une relation du type :

$$(1) \qquad \alpha a_{n+1} + \beta a_n + \gamma a_{n-1} = 0 \ , \qquad \forall\, n \geq 1$$

où α, β, γ sont trois nombres réels ne dépendant que de λ.

d) Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ à valeurs réelles ou complexes, dépendant du paramètre λ, satisfaisant à la relation (1) et au résultat obtenu dans b).

e) Calculer a_0 et en déduire, en fonction de n et de λ, l'expression du coefficient a_n.

4- Développement en série de Fourier

a) Justifier l'égalité, pour tout x réel : $f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos n\theta$

b) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\theta) = \lambda f(\theta) \sin \theta$.

c) En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in N}$ de fonctions polynomiales indépendantes de λ telle que, pour tout θ réel, on ait :

$$(2) \qquad f(\theta) = \sum_{0}^{+\infty} \lambda^n P_n (\cos \theta)$$

Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, l'utilisation de la variable $x = \cos \theta$ permet de considérer les polynômes P_n (conformément d'ailleurs à la formule (2)), comme les coefficients d'un développement en série entière.

1- Etant donné un nombre complexe z de module strictement inférieur à un et, s'il n'est pas nul, d'argument θ, calculer en fonction de h et de θ, le terme général U_n de la série produit des deux séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}^n \qquad (\text{où } \bar{z} \text{ est le conjugué de z})$$

2- a) Vérifier, pour tout entier naturel n, qu'il existe une et une seule fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire et continue telle que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\quad , \quad f_n(\theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}$$

b) Quelle relation existe-t-il entre P_n et f_n ?

c) Vérifier que, pour tout entier n et pour tout réel θ, on a :

$$|f_n(\theta)| \leq n + 1$$

d) Soit θ fixé et $h \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n f_n(\theta)$ et calculer la somme de cette série.

3- Propriétés des polynômes P_n

a) Déduire des résultats précédents que la fonction g de deux variables x et h définies dans $[-1, +1] \times]-1, +1[$ par :

$$g(x,h) = \frac{1}{1 - 2hx + h^2}$$

est développable en série entière en h sous la forme :

$$g(x, h) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, h^n$$

où les P_n sont les fonctions polynomiales définies au I-4.

Vérifier que : $\forall x \in [-1, +1] \qquad |P_n(x)| \leq n + 1$

b) Donner les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

c) Montrer, pour $n \geq 1$, que le polynôme P_n a n racines dans $]-1, +1[$. Préciser ces racines.

4- Relations de récurrence.

a) Justifier l'écriture de deux façons différentes du développement en série entière en h pour $h \in]-1, +1[$ de la fonction G définie par :

$$G(x, h) = (1 - 2hx + h^2) \frac{\partial g}{\partial h}(x, h).$$

b) En déduire, pour $n \geq 1$, une relation de récurrence entre trois polynômes P_{n+1}, P_n, P_{n-1} d'indices consécutifs.

Quel est le degré de P_n et la valeur du coefficient de plus haut degré ? Que peut-on dire de ses racines ?

c) Retrouver cette relation en utilisant la somme :

$$f_{n+1}(\theta) + f_{n-1}(\theta).$$

d) Déterminer les polynômes P_3 et P_4.

TROISIEME PARTIE

Orthogonalité des polynômes P_n

On se propose de relier les polynômes P_n à l'application linéaire D associant à toute fonction f de classe C^2 sur $[-1, +1]$ la fonction continue Df définie sur $[-1, +1]$ par :

$$Df(x) = -3x f'(x) + (1 - x^2) f''(x)$$

On vérifiera que, sur $]-1, +1[$, $\quad Df(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \dfrac{d}{dx}((1 - x^2)^{3/2} f'(x))$

Dans ce qui suit, E désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^1 sur $[-1, +1]$ et on considère la forme bilinéaire symétrique sur E x E définie par :

$$(f,g) \to (f/g) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, f(x)\, g(x)\, dx$$

Les sous espaces vectoriels de E constitués des fonctions polynômes (respectivement polynômes de degré $\leq n$) sont notés $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{P}_n$).

1- Propriétés de D sur $\mathcal{P}$

a) Vérifier que (f/g) définit sur E un produit scalaire.

b) Montrer que les restrictions T (resp T_n) de D à $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{P}_n$) induisent des endomorphismes de $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{P}_n$).

c) Prouver que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathcal{P}$, on a (TP/Q) = (P/TQ).

2- Valeurs propres et vecteurs propres de T

a) En s'aidant par exemple de la matrice de T_n sur la base canonique de $\mathcal{P}_n$, prouver que l'ensemble des valeurs propres de T_n peut être ordonné en une suite décroissante (λ_p) $0 \leq p \leq n$ d'entiers négatifs ou nuls. Prouver également que les sous espaces propres associés sont de dimension 1.

b) Déterminer l'équation différentielle $(\mathcal{E}_p)$ vérifiée par les polynômes vecteurs propres de T associés à λ_p.

c) Soit $x \to y(x)$ une solution sur $]-1, +1[$ de l'équation $(\mathcal{E}_p)$. On pose $\theta = \text{Arc cos}x$. Montrer que la fonction z définie sur $]0, \pi[$ par :

$$z(\theta) = \sin\theta\, y(\cos\theta)$$

est solution d'une équation différentielle linéaire $(\mathcal{E}'_p)$ du second ordre homogène à coefficients constants que l'on déterminera.

d) Intégrer l'équation $(\mathcal{E}'_p)$ et en déduire la solution générale sur $]-1, +1[$ de l'équation $(\mathcal{E}_p)$.

e) Déduire de ce qui précède les vecteurs propres de T et en comparant les polynômes obtenus aux éléments de la suite (P_n) des précédentes parties, déterminer les relations d'orthogonalité vérifiées par ces polynômes P_n dans l'espace préhilbertien réel E.

f) Calculer la norme de P_n.

3- Développement d'une fonction de E

On désigne par (p_n) la suite de polynômes définie par $p_n = \dfrac{P_n}{\|P_n\|}$ ($\|\ \|$ désignant la norme associée au produit scalaire) et, pour toute fonction g de E, on pose, quel que soit l'entier n,

$$c_n(g) = (g/p_n).$$

a) Trouver une fonction 2π-périodique h impaire dont les coefficients de Fourier trigonométriques $b_n(h)$ vérifient :

$$c_n(g) = b_{n+1}(h)$$

b) En déduire que g peut être développée en série de polynômes P_n suivant la formule :

$$\forall\, x \in [-1, +1] \qquad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{0}^{+\infty} c_n(g)\, P_n(x).$$

c) Montrer que la série $\sum_{0}^{+\infty} c_n(g)^2$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide de $\|g\|$.